

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 23.02.2014 -****CLASA A IX-A**

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.**

1. a) O progresie aritmetică de rație pozitivă conține numerele 14, 26, 42. Să se arate că numărul 2014 este termen al progresiei.

b) Fie $(b_n)_{n \geq 1}$ o progresie geometrică având termenii pozitivi. Să se arate că

$$(b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{2014})(b_1 + b_{2014}) \geq 4028 b_1 b_{2014}.$$

2. În triunghiul ABC se notează cu M, N , respectiv P punctele de tangență ale cercului înscris în acesta cu laturile $(BC), (CA)$, respectiv (AB) .

a) Să se arate că $2\overrightarrow{AM} = (a+b-c)\overrightarrow{AB} + (a+c-b)\overrightarrow{AC}$.

b) Să se arate că $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$ dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

3. a) Să se arate că, dacă $\alpha > 0$, atunci valoarea maximă a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \frac{x}{x^2 + \alpha}$ este $\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$.

b) Să se arate că, dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, atunci

$$\frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ac} + \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

4. Se numerează vârfurile unui cub $ABCDEFGH$ cu câte un număr natural de la 1 la 8, astfel încât oricăror două vârfuri distincte să li se atribuie numere diferite.

a) Se atribuie fiecărei fețe numărul egal cu suma numerelor atribuite vârfurilor care o determină. Să se arate că există patru fețe cu suma numerelor atribuite egală cu 72.

b) Se atribuie fiecărei muchii numărul egal cu suma numerelor atribuite vârfurilor care o determină. Există o numerotare a vârfurilor pentru care numerele atribuite muchiilor sunt distincte două câte două? Justificați răspunsul!